

高等数学(一)

本大纲适用于工学、理学(生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类四个一级学科除外)专业的考生。

总 要 求

考生应按本大纲的要求,了解或理解高等数学中极限和连续、一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、常微分方程的基本概念与基本理论;学会、掌握或熟练掌握上述各部分的基本方法,应注意各部分知识的结构及知识的内在联系;应具有一定的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力、空间想象能力;能运用基本概念、基本理论和基本方法正确地推理证明,准确地计算;能综合运用所学知识分析并解决简单的实际问题。

本大纲对内容的要求由低到高,对概念和理论分为“了解”和“理解”两个层次;对方法和运算分为“会”“掌握”和“熟练掌握”三个层次。

考 试 内 容

一、极限和连续

(一) 极限

1. 知识范围

(1) 数列极限的概念与性质

数列极限的定义

唯一性 有界性 四则运算法则 夹逼定理 单调有界数列极限存在定理

(2) 函数极限的概念与性质

函数在一点处极限的定义 左、右极限及其与极限的关系 x 趋于无穷($x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$)时函数的极限 唯一性 四则运算法则 夹逼定理

(3) 无穷小量与无穷大量

无穷小量与无穷大量的定义 无穷小量与无穷大量的关系 无穷小量的性质 无穷小量的比较

(4) 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2. 要求

(1) 理解极限的概念(对极限定义中“ $\epsilon - N$ ”“ $\epsilon - \delta$ ”“ $\epsilon - M$ ”等形式的描述不作要求).会求函数在一点处的左极限与右极限,了解函数在一点处极限存在的充分必要条件.

(2) 了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

(3) 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系.会进行无穷小量的比较(高阶、低阶、同阶和等价).会运用等价无穷小量代换求极限.

(4) 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

(二) 连续

1. 知识范围

(1) 函数连续的概念

函数在一点处连续的定义 左连续与右连续 函数在一点处连续的充分必要条件 函数的间断点

(2) 函数在一点处连续的性质

连续函数的四则运算 复合函数的连续性 反函数的连续性

(3) 闭区间上连续函数的性质

有界性定理 最大值与最小值定理 介值定理(包括零点定理)

(4) 初等函数的连续性

2. 要求

(1) 理解函数在一点处连续与间断的概念,理解函数在一点处连续与极限存在的关系,掌握函数(含分段函数)在一点处的连续性的判断方法.

(2) 会求函数的间断点.

(3) 掌握在闭区间上连续函数的性质,会用介值定理推证一些简单命题.

(4) 理解初等函数在其定义区间上的连续性,会利用连续性求极限.

二、一元函数微分学

(一) 导数与微分

1. 知识范围

(1) 导数概念

导数的定义 左导数与右导数 函数在一点处可导的充分必要条件 导数的几何意义与物理意义 可导与连续的关系

(2) 求导法则与导数的基本公式

导数的四则运算 反函数的导数 导数的基本公式

(3) 求导方法

复合函数的求导法 隐函数的求导法 对数求导法 由参数方程确定的函数的求导法 求分段函数的导数

(4) 高阶导数

高阶导数的定义 高阶导数的计算

(5) 微分

微分的定义 微分与导数的关系 微分法则 一阶微分形式不变性

2. 要求

(1) 理解导数的概念及其几何意义,了解可导性与连续性的关系,掌握用定义求函数在一点处的导数的方法.

(2) 会求曲线上一点处的切线方程与法线方程.

(3) 熟练掌握导数的基本公式、四则运算法则及复合函数的求导

方法,会求反函数的导数.

(4) 掌握隐函数求导法、对数求导法以及由参数方程所确定的函数的求导方法,会求分段函数的导数.

(5) 理解高阶导数的概念,会求简单函数的 n 阶导数.

(6) 理解函数的微分概念,掌握微分法则,了解可微与可导的关系,会求函数的一阶微分.

(二) 微分中值定理及导数的应用

1. 知识范围

(1) 微分中值定理

罗尔(Rolle)定理 拉格朗日(Lagrange)中值定理

(2) 洛必达(L'Hospital)法则

(3) 函数单调性的判定法

(4) 函数的极值与极值点、最大值与最小值

(5) 曲线的凹凸性、拐点

(6) 曲线的水平渐近线与铅直渐近线

2. 要求

(1) 理解罗尔定理、拉格朗日中值定理及它们的几何意义.会用拉格朗日中值定理证明简单的不等式.

(2) 熟练掌握用洛必达法则求“ $\frac{0}{0}$ ”“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”“ $0 \cdot \infty$ ”“ $\infty - \infty$ ”型未定式的极限的方法.

(3) 掌握利用导数判定函数的单调性及求函数的单调增、减区间的方法,会利用函数的单调性证明简单的不等式.

(4) 理解函数极值的概念,掌握求函数的驻点、极值点、极值、最大值与最小值的方法,会解简单的应用问题.

(5) 会判断曲线的凹凸性,会求曲线的拐点.

(6) 会求曲线的水平渐近线与铅直渐近线.

三、一元函数积分学

(一) 不定积分

1. 知识范围

(1) 不定积分

原函数与不定积分的定义 原函数存在定理 不定积分的性质

(2) 基本积分公式

(3) 换元积分法

第一换元法(凑微分法) 第二换元法

(4) 分部积分法

(5) 一些简单有理函数的积分

2. 要求

(1) 理解原函数与不定积分的概念及其关系,掌握不定积分的性质,了解原函数存在定理.

(2) 熟练掌握不定积分的基本公式.

(3) 熟练掌握不定积分第一换元法,掌握第二换元法(限于三角代换与简单的根式代换).

(4) 熟练掌握不定积分的分部积分法.

(5) 会求简单有理函数的不定积分.

(二) 定积分

1. 知识范围

(1) 定积分的概念

定积分的定义及其几何意义 可积条件

(2) 定积分的性质

(3) 定积分的计算

变上限积分 牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式 换元积分法

分部积分法

(4) 无穷区间的反常积分

(5) 定积分的应用

平面图形的面积 旋转体的体积

2. 要求

(1) 理解定积分的概念及其几何意义,了解函数可积的条件.

(2) 掌握定积分的基本性质.

(3) 理解变上限积分是变上限的函数,掌握对变上限积分求导数的方法.

(4) 熟练掌握牛顿-莱布尼茨公式.

(5) 掌握定积分的换元积分法与分部积分法.

(6) 理解无穷区间的反常积分的概念,掌握其计算方法.

(7) 掌握直角坐标系下用定积分计算平面图形的面积以及平面图形绕坐标轴旋转所生成的旋转体的体积.

四、空间解析几何

(一) 平面与直线

1. 知识范围

(1) 常见的平面方程

点法式方程 一般式方程

(2) 两平面的位置关系(平行、垂直)

(3) 空间直线方程

标准式方程(又称对称式方程或点向式方程) 一般式方程

(4) 两直线的位置关系(平行、垂直)

(5) 直线与平面的位置关系(平行、垂直和直线在平面上)

2. 要求

(1) 会求平面的点法式方程、一般式方程,会判定两平面的垂直、平行.

(2) 了解直线的一般式方程,会求直线的标准式方程,会判定两直线平行、垂直.

(3) 会判定直线与平面间的关系(垂直、平行、直线在平面上).

(二) 简单的二次曲面

1. 知识范围

球面 母线平行于坐标轴的柱面 旋转抛物面 圆锥面 椭球面

2. 要求

了解球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转抛物面、圆锥面和椭球面的方程及其图形.

五、多元函数微积分学

(一) 多元函数微分学

1. 知识范围

(1) 多元函数

多元函数的定义 二元函数的几何意义 二元函数极限与连续的概念

(2) 偏导数与全微分

偏导数 全微分 二阶偏导数

(3) 复合函数的偏导数

(4) 隐函数的偏导数

(5) 二元函数的无条件极值与条件极值

2. 要求

(1) 了解多元函数的概念、二元函数的几何意义,会求二元函数的表达式及定义域,了解二元函数的极限与连续概念(对计算不作要求).

(2) 理解偏导数概念,了解偏导数的几何意义,了解全微分概念,了解全微分存在的必要条件与充分条件.

(3) 掌握二元函数的一、二阶偏导数计算方法.

(4) 掌握复合函数一阶偏导数的求法.

(5) 会求二元函数的全微分.

(6) 掌握由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的一阶偏导数的计算方法.

(7) 会求二元函数的无条件极值,会用拉格朗日乘数法求二元函数的条件极值.

(二) 二重积分

1. 知识范围

(1) 二重积分的概念

二重积分的定义 二重积分的几何意义

(2) 二重积分的性质

(3) 二重积分的计算

(4) 二重积分的应用

2. 要求

(1) 理解二重积分的概念及其性质.

(2) 掌握二重积分在直角坐标系及极坐标系下的计算方法.

(3) 会用二重积分解决简单的应用问题(限于空间封闭曲面所围成的有界区域的体积、平面薄板的质量).

六、无穷级数

(一) 数项级数

1. 知识范围

(1) 数项级数

数项级数的概念 级数的收敛与发散 级数的基本性质 级数收敛的必要条件

(2) 正项级数收敛性的判别法

比较判别法 比值判别法

(3) 任意项级数

交错级数 绝对收敛 条件收敛 莱布尼茨判别法

2. 要求

(1) 理解级数收敛、发散的概念.掌握级数收敛的必要条件,了解级数的基本性质.

(2) 会用正项级数的比值判别法与比较判别法.

(3) 掌握几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ 、调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 与 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的收敛性.

(4) 了解级数绝对收敛与条件收敛的概念,会使用莱布尼茨判别法.

(二) 幂级数

1. 知识范围

(1) 幂级数的概念

收敛半径 收敛区间

(2) 幂级数的基本性质

(3) 将简单的初等函数展开为幂级数

2. 要求

(1) 了解幂级数的概念.

(2) 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和、差、逐项求导与逐项积分).

(3) 掌握求幂级数的收敛半径、收敛区间(不要求讨论端点)的方法.

(4) 会运用 e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林(Maclaurin)公式, 将一些简单的初等函数展开为 x 或 $x-x_0$ 的幂级数.

七、常微分方程

(一) 一阶微分方程

1. 知识范围

(1) 微分方程的概念

微分方程的定义 阶 解 通解 初始条件 特解

(2) 可分离变量的方程

(3) 一阶线性方程

2. 要求

(1) 理解微分方程的定义, 理解微分方程的阶、解、通解、初始条件和特解.

(2) 掌握可分离变量方程的解法.

(3) 掌握一阶线性方程的解法.

(二) 二阶线性微分方程

1. 知识范围

(1) 二阶线性微分方程解的结构

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程

(3) 二阶常系数非齐次线性微分方程

2. 要求

- (1) 了解二阶线性微分方程解的结构.
- (2) 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法.
- (3) 掌握二阶常系数非齐次线性微分方程的解法(自由项限定为 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, 其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, α 为实常数).

考试形式及试卷结构

试卷总分:150 分

考试时间:150 分钟

考试方式:闭卷, 笔试

试卷内容比例:

极限和连续	约 10%
一元函数微分学	约 25%
一元函数积分学	约 25%
多元函数微分学(含空间解析几何)	约 20%
无穷级数	约 10%
常微分方程	约 10%

试卷题型比例:

选择题	约 55%
填空题	约 15%
解答题	约 30%

样 题

一、选择题:1~12 小题, 每小题 7 分, 共 84 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $5x - \sin 5x$ 是 x 的

A. 高阶无穷小量

B. 等价无穷小量

C. 同阶无穷小量,但不是等价无穷小量

D. 低阶无穷小量

2. 设 $y = \sqrt{2x+1}$, 则 $y' =$

A. $\frac{3}{2\sqrt{2x+1}}$

B. $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$

C. $\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$

D. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ b+x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $b =$

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

4. $\int 2\cos 3x dx =$

A. $\frac{1}{6}\sin 3x + C$

B. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$

C. $\frac{2}{3}\sin 3x + C$

D. $6\sin 3x + C$

5. 设函数 $f(x) = 2\ln x$, 则 $f''(x) =$

A. $-\frac{2}{x^2}$

B. $\frac{2}{x^2}$

C. $-\frac{1}{x^2}$

D. $\frac{1}{x^2}$

6. $\left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)' =$

A. $\sin 2x$

B. $\sin^2 x$

C. $\cos^2 x$

D. $-\sin 2x$

7. 设函数 $f(x) = |x|$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx =$

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

8. 设 $z = e^{xy}$, 则 $dz =$

A. $e^{xy} dx + e^{xy} dy$

B. $e^x dx + e^y dy$

C. $ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$

D. $e^y dx + e^x dy$

9. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{2}$

10. 已知直线 $\frac{x-1}{k} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-4}$ 在平面 $3x-2y+z-7=0$ 上,

则 $k =$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. 区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$

12. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径为

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

二、填空题: 13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分.

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x =$ _____.

14. $\int x e^{x^2} dx =$ _____.

15. 设 $\begin{cases} x=1+t^2, \\ y=t^3 \end{cases}$ (其中 t 为参数), 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} =$ _____.

三、解答题: 16~18 小题, 每小题 15 分, 共 45 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (15 分)

求微分方程 $y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{x}{1+x}$ 满足初值条件 $y \Big|_{x=1} = \frac{1}{4}$ 的特解.

17. (15 分)

计算 $\iint_D (x+y^2) dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=0, y=x, x=1$ 所围

成的闭区域.

18. (15 分)

证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1 + x$.

参 考 答 案

一、选择题

- | | | | | |
|-------|-------|------|------|-------|
| 1. A | 2. D | 3. B | 4. C | 5. A |
| 6. B | 7. C | 8. C | 9. A | 10. C |
| 11. D | 12. B | | | |

二、填空题

13. e^2 14. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ 15. 3

三、解答题

$$\begin{aligned} 16. \text{解: } y &= e^{-\int \frac{1}{1+x} dx} \left(\int \frac{x}{1+x} e^{\int \frac{1}{1+x} dx} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{1+x} \left(\int x dx + C \right) \\ &= \frac{1}{1+x} \left(\frac{x^2}{2} + C \right). \end{aligned}$$

由 $y \Big|_{x=1} = \frac{1}{4}$ 得 $C=0$, 所以特解为 $y = \frac{x^2}{2(1+x)}$.

$$\begin{aligned} 17. \text{解: } \iint_D (x + y^2) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x (x + y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

18. 证: 设 $f(x) = e^x - 1 - x$, 则 $f'(x) = e^x - 1$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

又因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $f(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

因此当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 - x > 0$, 即 $e^x > 1 + x$.